Eesti koolinoorte LVIII täppisteaduste olümpiaad
MATEMAATIKA KOOLIVOOR
Tallinnas, 24. novembril 2010.a.
XI klass

LAHENDUSED JA HINDAMINE

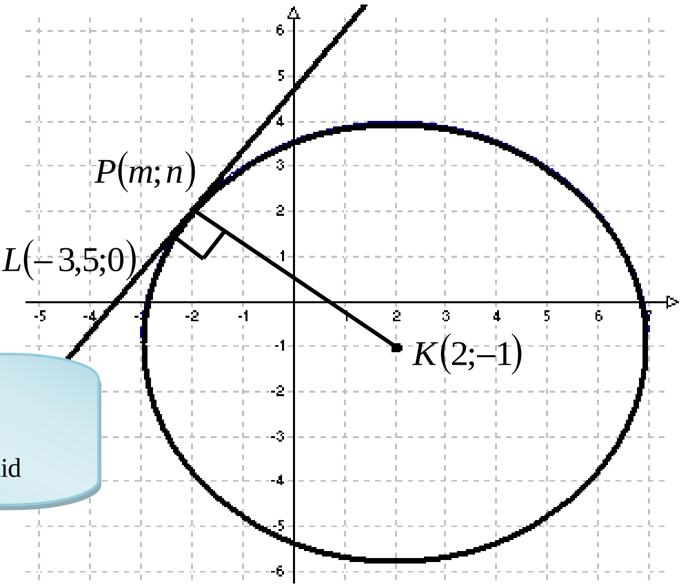
1. *Vastus:* **(-2; 2)**

Lahendus. Teisendame ringjoone võrrandi kanoonilisele kujule.

$$x^2+y^2-4x+2y-20=0$$
$$x^2-4x+y^2+2y=20$$
$$x^2-4x+4+y^2+2y+1=20+4+1$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2=5^2$$

Ringjoone kanooniline võrrand $(x-k_1)^2+(y-k_2)^2=r^2$, kus $K(k_1;k_2)$ on ringi keskpunkt ning r raadius.

Niisiis on ringjoone keskpunkt $K(2;-1)$ ja raadius $r=5$.



Tähistame puutepunkti koordinaadid $P(m;n)$ ja puutuja lõikepunkti $L(-3{,}5;0)$.

Sellistel eeldusel on raadiuse tõus $\dfrac{n-1}{m-2}$ ning puutuja tõus $\dfrac{n}{m+3{,}5}$.

Sirge tõus $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, kus $(x_1;y_1)$ ja $(x_2;y_2)$ on sirge punktid

Et puutuja ja puutepunktist tõmmatud raadius on risti, siis

$$\frac{n-1}{m-2}=-\frac{m+3{,}5}{n},$$

Sirgete ristseisu tunnus $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$,

millest pärast lihtsustamist

$$m^2+n^2+1{,}5m+n-7=0.$$

Lisaks eelmisele võrrandile teame, et puutepunkt asub ringjoonel. Seega rahuldavad puutepunkti P koordinaadid ka ringjoone võrrandit. Saame süsteemi, mille lahendamiseks lahutame esimesest võrrandist teise

$$-\begin{cases} m^2+n^2-4m+2n-20=0 \\ m^2+n^2+1{,}5m+n-7=0 \end{cases}$$
$$-5{,}5m+n-13=0$$
$$n=5{,}5m+13$$

ning saadud tulemuse asendame teise võrrandisse.

$$m^2+(5{,}5m+13)^2+1{,}5m+5{,}5m+13-7=0$$

Lihtsustades

$m^2+4{,}8m+5{,}6=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow n=2$ (teine lahendipaar annab langeva puutuja)

Puutepunkti koordinaadid on $P(-2;2)$.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

2. *Vastus:* **a ∈ {-69; -32; -27; -12; 13; 28; 65}**

Lahendus. Teisendame ülesandes antud murru uurimiseks sobivale kujule

$$\frac{2012+a}{a+2}=\frac{2010+a+2}{a+2}=\frac{2010}{a+2}+1.$$

Viimasest on selge, et algse murru väärtus on täisarv siis, kui $2010 \vdots (a+2)$.
Et $2010 = 2\cdot3\cdot5\cdot67$, siis on $a+2$ võimalikud väärtused: ±2 (-2 muidugi ei sobi aga see pole hetkel oluline); ±3; ±5; ±6 ($2\cdot3$); ±10; ±15; … ; ±2010.
Vastavalt ülesande tingimustele on *a* kahekohaline täisarv, seega jäävad võimalused

$a+2$	-10	15	-15	30	-30	67	-67
a	-12	13	-17	28	-32	65	-69

Niisiis on *a* võimalikud väärtused -69; -32; -27; -12; 13; 28; 65.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

3.

*Lahendus 1***.** Seosest $2x+4y=1$ avaldame $x=\frac{1}{2}-2y$. Seega on vaja tõestada võrratus $\left(\frac{1}{2}-2y\right)^2+y^2\geq\frac{1}{20}$.

Selle lihtsustamisel saame

$$\frac{1}{4}-2y+4y^2+y^2\geq\frac{1}{20}$$

$$5y^2-2y+\frac{1}{5}\geq 0 \quad \bigg|\cdot 5$$

$$25y^2-10y+1\geq 0$$

See võrratus aga kehtib, sest ruutliikme kordaja on positiivne (vastav parabool avaneb üles) ning diskriminant $D=(-10)^2-4\cdot 25\cdot 1=0$.

Võrdus kehtib, kui saadud ruutvõrratus kehtib võrdusena, seega ainult juhul, kui $y=\frac{10\pm 0}{2\cdot 50}=\frac{1}{5}$, millest $x=\frac{1}{2}-2y=\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$.

Lahendus 2. Teisendame lähtevõrratuse kujule $\left(x^2+y^2\right)\left(2^2+4^2\right)\geq 2x+4y$. Tegemist Cauchy võrratusega konkreetsete vektorite $(x;y)$ ja $(2;4)$ korral ning see kehtib. Cauchy võrratusest on teada, et võrdusjuht leiab aset ainult siis, kui need vektorid on kollineaarsed. Seega võrdusjuhul leidub *k*, et $x=2k$ ja $y=4k$. Asetades need tingimused avaldisse $2x+4y=1$ leiame, et $k=\frac{1}{20}$, millest $x=\frac{1}{10}$ ja $y=\frac{1}{5}$.

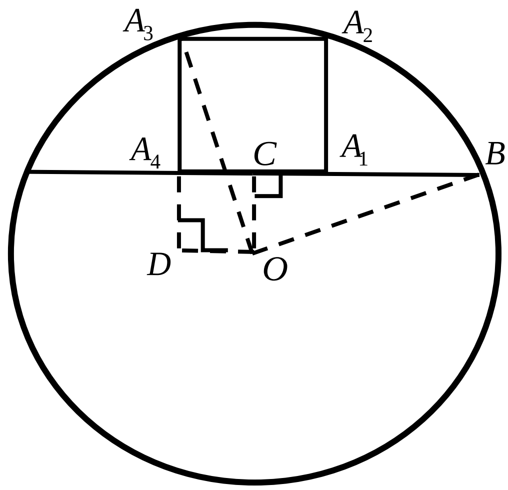
Lahendus3. Teisendame lähtevõrratuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2-\frac{1}{100}-\frac{1}{25}+\frac{1}{10}\cdot(2x+4y)=$$

$$\left(x-\frac{1}{10}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{1}{20}$$

Kuna reaalarvu ruut on mittenegatiivne, siis on viimasest kujust ilmne, et võrratus $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$ kehtib. Võrdus leiab aset ainult juhul, kui $\left(x-\frac{1}{10}\right)^2=0$ ja $\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=0$ ehk siis, kui $x=\frac{1}{10}$ ja $y=\frac{1}{5}$.

4. *Vastus:* $\boldsymbol{r} = \mathbf{5}$.



Lahendus. Teeme abistava joonise.
Ruudu tipud tähistame tähtedega A_1, A_2, A_3 ja A_4 ning ringjoone keskpunkti tähega O. Moodustame joonisel näidatud moel täisnurksed kolmnurgad OBC ja OA_3D.
Kuna kõõl toetub kesknurgale 120°, siis $\angle BOC = 60°$ ning täisnurksest kolmnurgast OBC:

$$\cos 60° = \frac{OC}{OB},$$

millest

$$OC = r \cdot \cos 60° = r \cdot \frac{1}{2} = \frac{r}{2},$$

kus tähega r on tähistatud ringjoone raadius.
Täisnurksest kolmnurgast OA_3D vastavalt Pythagorase teoreemile:

$$|A_3D|^2 + |OD|^2 = |A_3O|^2,$$

millest ruudu külje pikkuse tähistamisel tähega a saame

$$\left(a + \frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2.$$

Lihtsustame ruudu küljepikkust asendamata.

$$a^2 + ar + \frac{r^2}{4} + \frac{a^2}{4} = r^2 \quad \Big| \cdot 4$$

$$3r^2 - 4ar - 5a^2 = 0$$

Et $r > a$, siis

$$r = \frac{4a + \sqrt{16a^2 + 60a^2}}{6} = \frac{4a + a\sqrt{76}}{6} = \frac{4 + 2\sqrt{19}}{6}a = \frac{\sqrt{19} + 2}{3}a$$

Asendame $a = \sqrt{19} - 2$.

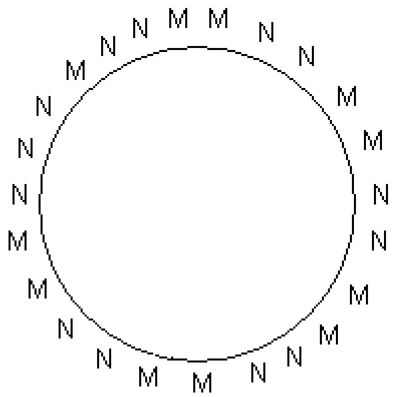
$$r = \frac{\left(\sqrt{19} + 2\right) \cdot \left(\sqrt{19} - 2\right)}{3} = \frac{19 - 4}{3} = 5$$

Ringjoone raadius $r = 5$.

5. *Vastus:* a) **jah**; b) **ei**.

Lahendus.

a) Näitame, et see on võimalik. Sobilik paigutus ringjoonel võib olla järgmine:



b) Igal peolisel on kaks naabrit. Paneme iga peolise jaoks kirja tema naabrid, saame kokku 48 kirjet. Et kellelgi ei oleks naabriks kaht neidu, peab igal neist vähemalt üks naaber olema noormees. Järelikult 48 kirje hulgas on vähemalt 24 noormeest. Teiselt poolt, iga noormees on naabriks täpselt kahele peolisele, nii et noormehi peab kirjete hulgas olema ülimalt 22. Saime vastuolu. Sellist ringi moodustada ei saa.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

HINDAMINE

1. Ringjoone keskpunkti leidmise eest — 1p
   Tõusude avaldamise ja ristseisu kasutamise eest — 2p
   Võrrandisüsteemi moodustamise ees — 2p
   Lahenduse tehnilise lõpuleviimise ja eest — 1p
   7p

2. Murru teisendamise ja tähelepaneku, et 2010 jagub teguriga $a + 2$, eest — 3p
   Ülesande tehnilise lõpuleviimise eest kokku (iga lahendipaari eest 1p) — 4p
   7p
   Märkus. Kui õpilane jätab välja negatiivsed lahendid, siis panna ülejäänus õige lahenduse eest 5p.

3. Lahendus 1
   Ühele muutujale ülemineku eest — 1p
   Võrratuse kujule $25y^2 - 10y + 1 \geq 0$ viimise eest — 1p
   Selgituse, et võrratus $25y^2 - 10y + 1 \geq 0$ on tõene, eest — 3p
   Võrduse selgituse eest — 2p
   7p

4. Korrektse abijoonise eest — 1p
   Ringjoone keskpunkti ja kõõlu vahelise kauguse leidmise eest — 1p
   Ringjoone raadiust ja ruudu külge siduva kolmnurga leidmise ja Pythagorase teoreemi rakendamise eest — 3p
   Lahenduse tehnilise lõpuleviimise eest — 2p
   7p
   Märkus. Joonisel on sobivaid kolmnurkade paare rohkem. Iga lahenduseni viiv kolmnurkade paar sobib.

5. Osa a) õige vastuse eest — 1p
   Osa a) sobiliku paigutuse joonise või kirjelduse eest — 2p
   Osa b) kirjete arvu 48 eest — 1p
   Osa b) noormeeste kirjete arvu 24 eest — 1p
   Osa b) maksimaalse naabriks olevate noormeeste arvu eest — 1p
   Osa b) õige vastuse eest — 1p
   7p
   Märkus. Kui õpilane esitab vastused ilma põhjenduseta, siis anda 1 punkt vaid juhul, kui õiged on mõlema osa vastused.